

ЭФФЕКТЫ ИНСТАНТОНОВ В ДВУМЕРНОЙ СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Коротков А. Н., Токарев В. Ф.

Найден эффективный лагранжиан двумерной скалярной электродинамики, учитывающий эффекты сложной структуры вакуума в модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно принято считать, что спонтанное нарушение симметрии играет определяющую роль в механизме появления массы у векторных бозонов. Однако идея о ненарушенности калибровочной симметрии также имеет своих сторонников, причем их число в последнее время растет (см. [1–4]). Следует отметить, что к данной проблеме имеется большое количество различных подходов.

В настоящей работе на примере скалярной электродинамики показывается, что учет пертурбативных эффектов, связанных с существованием инстантонов, дает возможность перехода к эффективному лагранжиану, содержащему лишь нейтральные поля. Показано, что в физическом пространстве присутствуют частицы, соответствующие именно этим полям. Таким образом, продемонстрирован конкретный механизм, приводящий к незаряженным физическим состояниям. Однако, если туннелирование мало, то сложная структура вакуума практически не сказывается на спектре масс частиц, он оказывается таким же, как в фазе Хиггса.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 строятся многоинстантонные конфигурации и вычисляется их энергия взаимодействия. В разделе 3 строится приближение разреженного инстантонного газа [5, 6] и на его основе находится эффективный низкоэнергетический лагранжиан, содержащий нейтральные скалярное и псевдоскалярное поля. В разделе 4 на основе эффективного лагранжиана вычислены функции Грина для калибровочно-инвариантных операторов, интерполирующих описанные выше скалярное и псевдоскалярное поля.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим лагранжиан скалярной электродинамики

$$(1) \quad L = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu \varphi|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\varphi^+ \varphi - \frac{c^2}{2} \right)^2$$

в двумерном евклидовом пространстве $x = (x_1, x_2)$. Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, A_μ — действительное векторное поле, φ — комплексное скалярное поле.

Лагранжиан (1) обладает калибровочной инвариантностью. Если предположить, что спонтанное нарушение симметрии сосредоточило поле φ вблизи значения $c/\sqrt{2}$, и воспользоваться теорией возмущений, то векторное поле A_μ приобретает массу $m_v = ec$; масса скалярного поля $m_s = \sqrt{\lambda c^2}$ (константы e , c , λ положительны).

Однако существование в данной модели инстантонов, показанное в работе [7], ведет к непертурбативным эффектам и говорит о некорректности использования только теории возмущений.

Основная конфигурация инстантонного типа (инстантон) имеет вид

$$(2) \quad A_\mu(x) = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi_I(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} e^{-i\theta(x)} (1 - \Psi_I(x)),$$

где $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0$, $\operatorname{tg} \theta(x) = x_1/x_2$, $x = (x_1, x_2)$. Отметим, что $\partial_\nu \Phi_I(0) = 0$, $\Psi_I(0) = 1$. Явный вид функции $\Phi_I(x)$, $\Psi_I(x)$ неизвестен, однако асимптотики следуют из уравнений движения

$$(3) \quad \Phi_I(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} D(x) - f_v \Delta^v(x), \quad \Psi_I(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} f_s \Delta^s(x).$$

Здесь f_v , f_s — некоторые действительные константы, $D(x) = -(\ln x^2)/(4\pi)$, $\Delta^{v,s}(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(m_{v,s}|x|)$, где K_0 — функция Макдональда нулевого порядка.

Из асимптотик ясно, что в рассматриваемой модели размеры инстантона являются фиксированными (в отличие от КХД), а именно $1/m_v$ для поля A_μ и $1/m_s$ для поля φ .

Отметим, что функции Φ_I , Ψ_I , Δ^v , Δ^s , D имеют аксиальную симметрию, т. е. зависят лишь от $|x|$. Также отметим соотношения

$$(4) \quad -\partial^2 D(x) = \delta(x), \quad (-\partial^2 + m_{v,s}^2) \Delta^{v,s}(x) = \delta(x).$$

Трансляционная инвариантность теории позволяет поместить центр инстантона (2) в произвольную точку z , для чего достаточно в (2) заменить $\Phi_I(x)$, $\Psi_I(x)$, $\theta(x)$ на $\Phi_I(x-z)$, $\Psi_I(x-z)$, $\theta(x-z)$, соответственно.

Дискретная симметрия лагранжиана (1) относительно операции $\varphi \rightarrow \varphi^\dagger$, $A_\mu \rightarrow -A_\mu$ позволяет ввести антиинстантон, получаемый из (2) данными преобразованиями.

Очевидно, действие инстантона ($S_{\text{инст}}$) равно действию антиинстантона. В дальнейшем нам понадобится предположение $\exp(-S_{\text{инст}}) \ll 1$ (мы можем этого добиться, так как параметры e , λ , c произвольны).

Топологический заряд конфигурации, обращающейся при $x \rightarrow \infty$ в чистую калибровку, определяется равенством

$$q = \frac{e}{2\pi} \oint A_\mu d\xi_\mu,$$

где интеграл берется по окружности бесконечного радиуса, $d\xi$ — элемент

дуги, обход против часовой стрелки. Заметим, что q есть также число «наворачиваний» фазы φ при обходе по бесконечному контуру.

Преобразуя контурный интеграл к двойному, имеем

$$(5) \quad q = \int q(x) d^2x, \quad q(x) = \frac{e}{4\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x).$$

Псевдоскалярная величина $q(x)$ называется плотностью топологического заряда.

Легко показать, что для инстантона (2) выполняется $q=1$, для антиинстантона $q=-1$.

Рассмотрим теперь совокупность N далеко разнесенных (анти) инстантонов (расстояния между центрами много больше $1/m_{v,s}$):

$$(6) \quad A_\mu(x) = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(x), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_I(x-z_i),$$

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} \exp\left(-i \sum_{i=1}^N q_i \theta(x-z_i)\right) \prod_{i=1}^N (1 - \Psi_I(x-z_i)).$$

Здесь $q_i = \pm 1$ — топологические заряды, различающие инстантон и антиинстантон, z_i — положение центра i -го (анти) инстантона.

Конфигурация (6) является лишь приближенным решением евклидовых уравнений движения. Этому соответствует то, что инстантоны взаимодействуют.

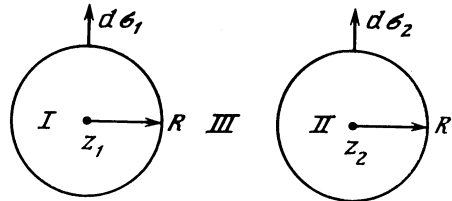
Найдем энергию взаимодействия двух далеко разнесенных инстантонов (одинаковых либо разных знаков топологического заряда). Воспользуемся сингулярной калибровкой, где конфигурации (6) соответствуют

$$(7) \quad A_\mu(x) = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(x) + \frac{1}{e} \sum_{i=1}^N q_i \partial_\mu \theta(x-z_i),$$

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} \prod_{i=1}^N (1 - \Psi_I(x-z_i)).$$

Здесь $N=2$. Энергия взаимодействия есть избыток действия для (7) над удвоенным действием инстантона.

При вычислении соответствующего двойного интеграла разобьем плоскость (x_1, x_2) на три части (см. рисунок). Назовем область I concentричный с первым инстантоном круг радиуса R , где $1/m_{v,s} \ll R \ll |z_2 - z_1|$. Область II — такой же круг, concentричный со вторым инстантоном, область III — оставшаяся часть плоскости.



Обозначим через ΔS_I , ΔS_{II} , ΔS_{III} части энергии взаимодействия, набирающиеся соответственно в областях I, II, III. Вычислим ΔS_I . В области I влияние второго инстантона сводится к малым добавкам к полям A_μ , φ , создаваемым первым инстантоном. При интегрировании соответствующего

приращения лагранжиана (1) можно использовать интегрирование по частям. При этом останутся лишь интегралы по границе области I, т. к. двойные интегралы равны нулю в силу того, что поля первого инстантона удовлетворяют уравнениям движения. Поэтому запишем

$$\Delta S_I = \oint_{\sigma_1} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{;k}} \delta \varphi d\sigma^k + \oint_{\sigma_1} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu;k}} \delta A_{\mu} d\sigma^k.$$

Здесь $d\sigma$ относится ко внешней нормали границы области I. Приращение полей (влияние второго инстантона) легко найти из (7) с учетом (3):

$$\delta A_{\mu} = q_2 \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\tau} \partial_{\tau} (-f_v \Delta^v(x-z_2)), \quad \delta \varphi = -\frac{c}{\sqrt{2}} f_s \Delta^s(x-z_2).$$

Здесь было учтено $\Psi_1(x-z_1) \ll 1$ на границе области I. Используя (3) и (4) для полей первого инстантона (т. к. $R \gg 1/m_{v,s}$), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{;k}} &= 2\partial_k \varphi = -\sqrt{2} c f_s \partial_k \Delta^s(x-z_1), \\ \frac{\partial L}{\partial A_{\mu;k}} &= F_{k\mu} = -q_1 \frac{2\pi}{e} \partial^2 \Phi = q_1 \frac{2\pi}{e} f_v m_v^2 \Delta^v(x-z_1). \end{aligned}$$

Поэтому можно записать

$$\Delta S_I = c^2 f_s^2 I_1^s + \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 q_1 q_2 f_v^2 m_v^2 I_2^v,$$

где используется обозначение

$$\begin{aligned} I_1^{v,s} &= \oint_{\sigma_1} (\partial_i \Delta^{v,s}(x-z_1)) \Delta^{v,s}(x-z_2) d\sigma^i, \\ I_2^{v,s} &= \oint_{\sigma_1} (\partial_i \Delta^{v,s}(x-z_2)) \Delta^{v,s}(x-z_1) d\sigma^i. \end{aligned} \tag{8}$$

Из соображений симметрии $\Delta S_{II} = \Delta S_I$.

При вычислении ΔS_{III} учитываем лишь главные перекрестные члены, т. к. поля и первого и второго инстантонов здесь малы. С использованием асимптотик (3) это дает

$$\begin{aligned} \Delta L &= q_1 q_2 \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 f_v^2 m_v^4 \Delta_1^v \Delta_2^v + c^2 f_s^2 (\partial_{\mu} \Delta_1^s) (\partial_{\mu} \Delta_2^s) + \\ &+ e^2 c^2 \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 f_v^2 q_1 q_2 (\partial_{\mu} \Delta_1^v) (\partial_{\mu} \Delta_2^v) + \lambda c^4 f_s^2 \Delta_1^s \Delta_2^s. \end{aligned}$$

Здесь для краткости используется обозначение $\Delta_i^{v,s} = \Delta^{v,s}(x-z_i)$. Легко видеть, что при интегрировании ΔL по частям двойные интегралы приравниваются нулю в силу (4), поэтому остаются лишь интегралы по границам областей I и II. Интеграл по границе области II может быть легко приведен к интегралу по границе области I с помощью соображений симметрии,

$$\Delta S_{III} = \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 q_1 q_2 f_v^2 m_v^2 (-I_1^v - I_2^v) + c^2 f_s^2 (-I_1^s - I_2^s).$$

Знак минус учитывает направление внешней нормали,

$$\Delta S_I + \Delta S_{II} + \Delta S_{III} = c^2 f_s^2 (I_1^s - I_2^s) + \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 f_v^2 m_v^2 q_1 q_2 (I_2^v - I_1^v).$$

Для вычисления $I_1^{v,s} - I_2^{v,s}$ рассмотрим следующий интеграл по области I:

$$\int_I \{(\partial_\mu \Delta^{v,s}(x-z_1)) (\partial_\mu \Delta^{v,s}(x-z_2)) + m_{v,s}^2 \Delta^{v,s}(x-z_1) \Delta^{v,s}(x-z_2)\} d^2x.$$

Будем интегрировать по частям двумя способами, по-разному перебрасывая производные. С помощью (4) легко получить

$$I_1^{v,s} - I_2^{v,s} = - \int_I \delta(x-z_1) \Delta^{v,s}(x-z_2) d^2x = - \Delta^{v,s}(z_1-z_2).$$

Таким образом, мы вычислили энергию взаимодействия двух далеко разнесенных инстантонов с центрами в точках z_1 и z_2 и топологическими зарядами q_1, q_2 :

$$(9) \quad U_{q_1 q_2}(z_1, z_2) = q_1 q_2 \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 m_v^2 f_v^2 \Delta^v(z_1-z_2) - c^2 f_s^2 \Delta^s(z_1-z_2).$$

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ЛАГРАНЖИАН

В этой части мы найдем эффективный низкоэнергетический лагранжиан модели (1), который учитывает непертурбативные эффекты и содержит поля, не преобразующиеся калибровочной группой.

Для этого займемся вычислением амплитуды вакуум-вакуумного перехода за бесконечное время. Пользуясь техникой функционального интеграла, запишем

$$(10) \quad Z = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle 0 | e^{-H_{\text{евкл}} \tau} | 0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^+ \times \\ \times \exp\left(- \int_{\infty} L(A_\mu, \varphi) d^2x\right).$$

Здесь \mathcal{N} — нормировка, интегрирование идет по конфигурациям, обращающимся в чистую калибровку при $x_2 \rightarrow \pm\infty$, двойной интеграл под знаком экспоненты берется по всему двумерному евклидову пространству.

Вследствие калибровочной свободы интеграл по $\mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^+$ содержит классы эквивалентных конфигураций, из которых надо выбирать по одному представителю. Мы не будем заниматься этим вопросом, предположив, что это уже сделано.

Пользуясь методом перевала, будем учитывать вклад в (10) лишь от окрестностей конфигурации $\varphi \equiv c/\sqrt{2}$, $A_\mu \equiv 0$ и конфигураций типа (6).

Обозначим через $Z_{\text{т.в.}}$ вклад в (10) от окрестности конфигурации $\varphi \equiv c/\sqrt{2}$, $A_\mu \equiv 0$. Пусть вклад в (10) от окрестности одноинстантонной конфигурации равен $Z_{\text{т.в.}} \cdot a$, где $a = c \exp(-S_{\text{инст}})$, а в константе c учтены отношения соответствующих детерминантов и наличие нулевой моды (здесь не проводится интегрирование по степени свободы, связанной с нулевой модой, его мы проведем отдельно). Вклад от окрестности N -инстантонной конфигурации (6) (без интегрирования по степеням свободы, связанным со сдвигами центров инстантонов) равен $Z_{\text{т.в.}} a^N \exp(-U_N)$, где U_N есть

энергия взаимодействия инстантонов, которая при учете лишь парных взаимодействий (см. (9)) равна

$$(11) \quad U_N = \sum_{i < j}^N U_{q_i q_j}(z_i, z_j).$$

В дальнейшем в обозначении центров инстантонов будет использоваться буква x вместо z .

Суммируя (интегрируя) вклады от всевозможных инстантонных конфигураций и конфигураций $A_\mu = 0$, $\varphi = c/\sqrt{2}$, получим

$$(12) \quad Z = Z_{\text{Т.В.}} \sum_{N^+=0}^{\infty} \sum_{N^-=0}^{\infty} \int d^2x_1^+ \dots d^2x_{N^+}^+ d^2x_1^- \dots d^2x_{N^-}^- \times \\ \times \frac{a^{N^++N^-}}{N^+! N^-!} e^{-U_{N^++N^-}}.$$

Здесь суммирование идет отдельно по количеству инстантонов (N^+) и антиинстантонов (N^-), x_i^+ — центр i -го инстантона, x_j^- — центр j -го антиинстантона. Комбинаторный множитель $1/(N^+!N^-!)$ исключает дополнительное суммирование эквивалентных конфигураций, получаемых перестановкой инстантонов.

В дальнейшем нам потребуется производящий функционал, который мы определим формулой

$$(13) \quad Z[\mu^+(x), \mu^-(x)] = Z_{\text{Т.В.}} \sum_{N^+=0}^{\infty} \sum_{N^-=0}^{\infty} \int d^2x_1^+ \dots d^2x_{N^+}^+ \times \\ \times d^2x_1^- \dots d^2x_{N^-}^- \frac{a^{N^++N^-}}{N^+! N^-!} e^{-U_{N^++N^-}} \prod_{i=1}^{N^+} e^{\mu^+(x_i^+)} \prod_{j=1}^{N^-} e^{\mu^-(x_j^-)}.$$

Здесь произвольные функции $\mu^+(x)$, $\mu^-(x)$ (химические потенциалы) играют роль тока в производящем функционале обычной полевой теории.

Может возникнуть вопрос о правомерности учета в (12) и (13) конфигураций с близко расположенными инстантонами. Однако, во-первых, при любых фиксированных N^+ , N^- относительный объем таких конфигураций в (N^++N^-) -мерном пространстве бесконечно мал, во-вторых, в разделе 4 будет показано, что средняя плотность инстантонов порядка $\exp(-S_{\text{инст}}) \ll 1$, т. е. они в действительности редко подходят друг к другу, в-третьих, мы интересуемся лишь свойствами теории на больших расстояниях.

Ниже мы выпишем лагранжиан, для которого амплитуда вакуум-вакуумного перехода за бесконечное время с точностью до константы совпадает с (12), что даст нам основания считать его эффективным лагранжианом модели (1).

Рассмотрим в двумерном евклидовом пространстве лагранжиан

$$(14) \quad L_{\sigma\varphi} = \frac{(\nabla\Sigma)^2 + m_v^2 \Sigma^2}{2} + \frac{(\nabla\sigma)^2 + m_s^2 \sigma^2}{2} - 2a \left(\cos \frac{\Sigma}{F_v} \right) \exp \frac{\sigma}{F_s},$$

где $F_v = (2\pi c f_v)^{-1}$, $F_s = (f_s c)^{-1}$.

Впоследствии мы увидим, что поле σ — истинный скаляр, поле Σ — псевдоскаляр. С псевдоскалярностью Σ связана некоторая трудность. Дело в том, что при переходе в пространство Минковского мы обязаны умножить псевдоскалярные поля на мнимую единицу, в результате чего метрика поля Σ станет отрицательной. Если же мы хотим положительности метрики в пространстве Минковского, то мы будем иметь отрицательную метрику в евклидовом пространстве. Поступим следующим образом. В евклидовом пространстве будем работать с лагранжианом (14), однако будем помнить, что физическим является поле $\Sigma' = i\Sigma$. В пространстве Минковского лагранжиану (14) будет соответствовать

$$L_{\text{эф Минк}} = \frac{1}{2} [(\nabla \Sigma')^2 - m_v^2 (\Sigma')^2] + \frac{1}{2} [(\nabla \sigma)^2 - m_s^2 \sigma^2] + 2a \left(\cos \frac{\Sigma'}{F_v} \right) \exp \frac{\sigma}{F_s}.$$

Вычислим амплитуду вакуум-вакуумного перехода в пространстве Евклида за бесконечное время для (14):

$$Z_{\text{эф}} = \mathcal{N}_{\text{эф}} \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\Sigma \exp \left(- \int L_{\text{эф}} d^2x \right).$$

Обозначая через $S_0(\Sigma)$, $S_0(\sigma)$ действия, соответствующие свободным полям Σ , σ , и разлагая в ряд экспоненту от проинтегрированного последнего члена (14), имеем

$$(15) \quad Z_{\text{эф}} = \mathcal{N}_{\text{эф}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2a)^N}{N!} \int d^2x_1 \dots d^2x_N \left[\int e^{-S_0(\sigma)} \prod_{i=1}^N \exp \left(\frac{\sigma(x_i)}{F_s} \right) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{D}\sigma \right] \left[\int e^{-S_0(\Sigma)} \prod_{i=1}^N \cos \frac{\Sigma(x_i)}{F_v} \mathcal{D}\Sigma \right].$$

Обозначим выражения в квадратных скобках через $I(\sigma)$, $I(\Sigma)$, соответственно. $I(\sigma)$ можно рассматривать как вакуумное среднее от $\exp \left(\int J_\sigma(x) \times \right. \\ \left. \times \sigma(x) d^2x \right)$, где $J_\sigma(x) = \left[\sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) \right] / F_s$. Тогда стандартная техника дает

$$I(\sigma) = \exp \left(\frac{1}{2F_s^2} \sum_i^N \sum_j^N \Delta^s(x_i-x_j) \right) \int \mathcal{D}\sigma e^{-S_0(\sigma)}.$$

Здесь функция Δ^s совпадает с использованной в разделе 2. Видно, что в сумме будут встречаться $\Delta^s(0)$. Эти нефизические бесконечности исчезнут, если мы поставим в лагранжиане (14) знак нормального произведения. Поэтому в двойной сумме можно положить $i \neq j$.

Чуть сложнее вычисляется $I(\Sigma)$. Раскладывая косинус в сумму экспонент, получим, что произведение косинусов разобьется на сумму $N+1$ классов по количеству минусов под знаком экспоненты. В каждом классе члены различаются только перестановкой порядка $1, 2, \dots, N$, который несуществен из-за последующего интегрирования по dx_i . Поэтому произ-

ведение косинусов заменим на

$$2^{-N} \sum_{N^-=0}^N \frac{N!}{N^-(N-N^-)!} \exp \left[\frac{i}{F_v} (-\Sigma(x_1) - \dots - \Sigma(x_{N^-}) + \Sigma(x_{N^-+1}) + \dots + \Sigma(x_N)) \right].$$

Здесь N^- характеризует класс, а комбинаторный множитель равен числу членов в классе. Обозначив $N^+ = N - N^-$ и сделав очевидные переобозначения для x_i , запишем

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\Sigma) = & \int e^{-S_0(\Sigma)} \frac{1}{2^N} \sum_{N^-=0}^N \frac{N!}{N^+!N^-!} \exp \left[\frac{-i}{F_v} \sum_i^{N^-} \Sigma(x_i^-) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{F_v} \sum_j^{N^+} \Sigma(x_j^+) \right] \mathcal{D}\Sigma. \end{aligned}$$

Тильда над I напоминает о сделанной перестановке точек x_i , однако в (15) можно вместо $I(\Sigma)$ использовать $\tilde{I}(\Sigma)$.

Повторяя выкладки с полем σ , найдем

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\Sigma) = & \frac{1}{2^N} \sum_{N^-=0}^N \frac{N!}{N^-!N^+!} \exp \left[\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J_z(x) J_z(y) \Delta^v(x-y) \right] \times \\ & \times \int \mathcal{D}\Sigma e^{-S_0(\Sigma)}, \end{aligned}$$

где

$$J_z(x) = \frac{1}{F_v} \left[\sum_{i=1}^{N^+} \delta(x-x_i^+) - \sum_{j=1}^{N^-} \delta(x-x_j^-) \right].$$

При замене интеграла по $d^2x d^2y$ суммой необходимо опять выбросить нефизические $\Delta^v(0)$.

Подставляя $I(\sigma)$, $\tilde{I}(\Sigma)$ в (15) и заменяя двойное суммирование по N , N^- на суммирование по N^+ , N^- , будем иметь

$$\begin{aligned} Z_{\text{эф}} = & Z'_{\text{Т.В.}} \sum_{N^+=0}^{\infty} \sum_{N^-=0}^{\infty} \int d^2x_1^+ \dots d^2x_{N^+}^+ d^2x_1^- \dots d^2x_{N^-}^- \times \\ & \times \left| \frac{a^{N^++N^-}}{N^+!N^-!} e^{-U_{N^++N^-}} \right. \end{aligned}$$

где

$$Z'_{\text{Т.В.}} = \mathcal{N}'_{\text{эф}} \int \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}\sigma \exp(-S_0(\Sigma) - S_0(\sigma)),$$

а функция $U_{N^++N^-}$ совпадает с введенной в (11). Сравнив выражение для $Z_{\text{эф}}$ и (12), получим важное равенство

$$Z/Z_{\text{Т.В.}} = Z_{\text{эф}}/Z'_{\text{Т.В.}},$$

дающее нам основания считать $L_{\text{эф}}$ эффективным лагранжианом модели (1).

Определим теперь производящий функционал

$$(16) \quad Z_{\text{эф}}[\mu^+(x), \mu^-(x)] = \mathcal{N}_{\text{эф}} \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\Sigma \left\{ \exp[-S_0(\Sigma) - S_0(\sigma)] \times \right. \\ \times \exp\left[2a \int d^2x \cos\left(\frac{\Sigma(x)}{F_0} - i \frac{\mu^+(x) - \mu^-(x)}{2} \right) \right] \times \\ \left. \times \exp\left(\frac{\sigma(x)}{F_s} + \frac{\mu^+(x) + \mu^-(x)}{2} \right) \right\}.$$

Действуя аналогично вычислению $Z_{\text{эф}}$, нетрудно показать, что

$$(17) \quad Z[\mu^+(x), \mu^-(x)]/Z_{\text{Т.В.}} = Z_{\text{эф}}[\mu^+(x), \mu^-(x)]/Z'_{\text{Т.В.}}$$

Отметим, что мнимая единица под знаком косинуса в (16) связана с псевдоскалярностью поля Σ .

Итак, мы получили эффективный низкоэнергетический лагранжиан (14) для модели (1). В следующей части мы покажем, как с помощью лагранжиана (14) считать различные вакуумные ожидания в теории (1).

Отметим, что Σ и σ — действительные поля, они не преобразуются калибровочной группой (являются нейтральными по отношению к ней). Это говорит в пользу того, что в теории с лагранжианом (1) не происходит спонтанного нарушения симметрии.

Рассмотрим более внимательно эффективный лагранжиан. Видно, что $\langle \Sigma \rangle = 0$, однако $\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \neq 0$. Учитывая, что $a \sim \exp(-S_{\text{инст}}) \ll 1$, в первом приближении $\sigma_0 = 2a/(F_s m_s^2)$. Массы частиц Σ , σ удовлетворяют соотношениям

$$(18) \quad m_\sigma^2 = m_s^2 - \frac{2a}{F_s^2} e^{\sigma_0/F_s}, \quad m_\Sigma^2 = m_v^2 + \frac{2a}{F_v^2} e^{\sigma_0/F_s}.$$

Мы видим, что в теории появились массы частиц, немного сдвинутые относительно m_s и m_v . В следующей части мы покажем, что в физическом подпространстве присутствуют частицы именно с такими массами.

4. ФУНКЦИИ ГРИНА

В этой части мы разовьем технику вычислений для функций Грина от калибровочно-инвариантных операторов в двумерной скалярной электродинамике, явно вычислим фурье-образы от $\langle TF_{\mu\nu}(x)F_{\tau\rho}(y) \rangle$, $\langle T\varphi^2(x)\varphi^2(y) \rangle$ и найдем аппроксимирующие операторы для полей σ , Σ .

Займемся вычислением $\langle TF_{\mu\nu}(x)F_{\tau\rho}(y) \rangle$. Представляя эту величину в виде функционального интеграла и учитывая лишь два главных члена, запишем

$$\langle TF_{\mu\nu}(x)F_{\tau\rho}(y) \rangle = \langle TF_{\mu\nu}(x)F_{\tau\rho}(y) \rangle^{\text{Т.В.}} + \langle TF_{\mu\nu}(x)F_{\tau\rho}(y) \rangle^{\text{инст}}.$$

Здесь первый член есть результат вычислений по теории возмущений (без учета инстантонов), второй член дает среднее по инстантонным конфигурациям в приближении разреженного инстантонного газа.

Переход в импульсное пространство для произвольных операторов B и C определим формулой

$$(19) \quad \langle B(p)C(k) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x d^2y e^{-ipx - iky} \langle TB(x)C(y) \rangle.$$

Стандартная техника для свободного векторного поля A_μ с массой m_ν приводит к формуле

$$(20) \quad \langle F_{\mu\nu}(k) F_{\tau\rho}(p) \rangle^{\text{Т.В.}} = \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\tau\rho} \delta(p+k) \frac{k^2}{k^2 + m_\nu^2}.$$

Для вычисления средних по инстантонным конфигурациям введем статистические операторы, имеющие смысл плотности инстантонов

$$\hat{n}^+(x) = \sum_{i=1}^{N^+} \delta(x - x_i^+), \quad \hat{n}^-(x) = \sum_{i=1}^{N^-} \delta(x - x_i^-),$$

$$\hat{n}(x) = \hat{n}^+(x) + \hat{n}^-(x).$$

Здесь x_i^+ , x_i^- — некоторые фиксированные точки (центры инстантонов и антиинстантонов).

Средние от статистических операторов можно вычислять с помощью производящего функционала (13), используя (16) и (17),

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^\pm(x) \rangle_{\text{инст}} &= \frac{1}{Z} \frac{\delta Z[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^\pm(x)} \Big|_{\substack{\mu^+ \equiv 0 \\ \mu^- \equiv 0}} = \frac{1}{Z_{\text{эф}}} \frac{\delta Z_{\text{эф}}[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^\pm(x)} \Big|_{\substack{\mu^+ \equiv 0 \\ \mu^- \equiv 0}} = \\ &= a \left\langle \left(c \frac{\Sigma(x)}{F_\nu} \mp i \sin \frac{\Sigma(x)}{F_\nu} \right) \exp \frac{\sigma(x)}{F_s} \right\rangle^{\Sigma, \sigma}. \end{aligned}$$

Здесь $\langle \rangle^{\Sigma, \sigma}$ означает вакуумное среднее для теории с лагранжианом (14). Учитывая первые члены в разложении косинуса и экспоненты, найдем

$$\langle \hat{n}^\pm(x) \rangle_{\text{инст}} = a \exp \frac{\sigma_0}{F_s}, \quad \text{где} \quad \sigma_0 = \frac{2a}{F_s m_s^2},$$

$$n = \langle \hat{n}(x) \rangle_{\text{инст}} = 2a \exp \frac{\sigma_0}{F_s}.$$

Средняя плотность инстантонов (с учетом антиинстантонов) n есть малая величина, т. к. $a \sim \exp(-S_{\text{инст}}) \ll 1$, поэтому инстантонный газ действительно можно считать разреженным.

Для вычисления $\langle T F_{\mu\nu}(x) F_{\tau\rho}(y) \rangle_{\text{инст}}$ запишем согласно (6)

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{2\pi}{e} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^2 \left[\int \Phi_{\text{I}}(x-z) (\hat{n}^+(z) - \hat{n}^-(z)) d^2 z \right].$$

Среднее от произведения статистических операторов вычисляется с учетом (13), (16), (17):

$$\begin{aligned} \langle T (\hat{n}^+(z) - \hat{n}^-(z)) (\hat{n}^+(u) - \hat{n}^-(u)) \rangle_{\text{инст}} &= \frac{1}{Z_{\text{эф}}} \left(\frac{\delta Z_{\text{эф}}[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^+(z) \delta \mu^+(u)} + \right. \\ &+ \left. \frac{\delta Z_{\text{эф}}[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^-(z) \delta \mu^-(u)} - \frac{\delta Z_{\text{эф}}[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^+(z) \delta \mu^-(u)} - \frac{\delta Z_{\text{эф}}[\mu^+, \mu^-]}{\delta \mu^-(z) \delta \mu^+(u)} \right) \Big|_{\substack{\mu^+ \equiv 0 \\ \mu^- \equiv 0}} = \\ &= n \delta(z-u) - 4a^2 \left\langle T \exp \frac{\sigma(z)}{F_s} \exp \frac{\sigma(u)}{F_s} \sin \frac{\Sigma(z)}{F_\nu} \sin \frac{\Sigma(u)}{F_\nu} \right\rangle^{\Sigma, \sigma}. \end{aligned}$$

Развивая теорию возмущений вблизи вакуума $\langle \Sigma \rangle = 0$, $\langle \sigma \rangle = \sigma_0$, получаем

$$\langle T F_{\mu\nu}(x) F_{\tau\rho}(y) \rangle_{\text{инст}} = \left(\frac{2\pi}{e} \right)^2 \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\tau\rho} \int \partial^2 \Phi_{\text{I}}(x-z) \partial^2 \Phi_{\text{I}}(y-u) \times$$

$$\times \left[n\delta(z-u) - \frac{4a^2}{F^2} \exp\left(\frac{2\sigma_0}{F_s}\right) \Delta^z(z-u) \right] d^2z d^2u.$$

Здесь функции Δ^z удовлетворяют уравнению (4) с массой m_z . Переходя в импульсное пространство и учитывая (19), (4), (18), получим

$$\langle F_{\mu\nu}(p) F_{\tau\rho}(k) \rangle_{\text{инст}} = \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\tau\rho} \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 (2\pi)^2 \delta(p+k) n \times \\ \times |(\partial^2 \Phi_I)(p)|^2 \frac{p^2 + m_v^2}{p^2 + m_z^2}.$$

Здесь $(\partial^2 \Phi_I)(p)$ — фурье-образ функции $\partial^2 \Phi_I(x)$, который согласно асимптотике (3) имеет при малых p вид $m_v^4 f_v^2 [2\pi(p^2 + m_v^2)]^{-1}$.

Складывая полученный результат с результатом (20) теории возмущений, имеем

$$(21) \quad \langle F_{\mu\nu}(p) F_{\tau\rho}(k) \rangle = \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\tau\rho} \delta(p+k) \frac{p^2 + m_z^2 - m_v^2}{p^2 + m_z^2}.$$

Заметим, что для плотности топологического заряда (см. (5)) справедливо

$$(22) \quad \langle q(p) q(k) \rangle = \left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \delta(p+k) \frac{p^2 + m_z^2 - m_v^2}{p^2 + m_z^2}.$$

Обратим внимание, что в (21) и (22) вместо теоретико-возмущенческого полюса $1/(p^2 + m_v^2)$ на самом деле присутствует полюс $1/(p^2 + m_z^2)$.

Немного отложив обсуждение полученных соотношений, приведем результаты вычисления $\langle \varphi^2(p) \varphi^2(k) \rangle$, которое проводится аналогично изложенному.

Для этой функции Грина выполняется принцип ослабления корреляций:

$$\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle T \varphi^2(x) \varphi^2(y) \rangle = (\langle \varphi^2(x) \rangle)^2,$$

где $\langle \varphi^2 \rangle$ оказалось равным

$$\langle \varphi^2(x) \rangle = \frac{c^2}{2} \left[1 - 2n \int \Psi_I(x) d^2x + n \int \Psi_I^2(x) d^2x + \right. \\ \left. + 4a^2 \left[\int \Psi_I(x) d^2x \right]^2 + \frac{4a^2}{F_s^2} \int \Psi_I(x) \Psi_I(y) \Delta^0(x-y) d^2x d^2y \right].$$

Функция Δ^0 удовлетворяет (4) с массой m_0 . Для малых импульсов ($p \ll 1/m_{v,s}$) справедливо

$$\langle \varphi^2(k) \varphi^2(p) \rangle_{\text{инст}} = (2\pi)^2 \delta(p+k) \delta(k) (\langle \varphi^2(x) \rangle)^2 + \\ + \frac{c^4}{4} (2\pi)^2 \delta(p+k) n \left[\frac{4f_s^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + m_s^2)(k^2 + m_0^2)} - \right. \\ \left. - \frac{4f_s}{2\pi} \frac{\Psi_I^2(k)}{k^2 + m_0^2} + \Psi_I^2(k) \Psi_I^2(k) \frac{k^2 + m_s^2}{k^2 + m_0^2} \right].$$

Здесь $\Psi_I^2(k)$ есть фурье-образ $\Psi_I^2(x)$; особенности функции $\Psi_I^2(k)$ начинаются с квадрата удвоенной массы скалярной частицы. Результат теории возмущений следующий: $\langle \varphi^2(p) \varphi^2(k) \rangle^{\text{T.B.}} = \delta(p+k) c^2 / (p^2 + m_s^2)$ (во избежание двукратного учета здесь выброшена часть, содержащая $c^4 \delta(k)$).

В итоге имеем

$$(23) \quad \langle \varphi^2(k) \varphi^2(p) \rangle = (2\pi)^2 \delta(p+k) \delta(k) (\langle \varphi^2(x) \rangle)^2 + \\ + c^2 \delta(p+k) \frac{1}{p^2 + m_\sigma^2} \left[1 - 2\pi f_s n c^2 \Psi_1^2(p) + \right. \\ \left. + (2\pi)^2 n \frac{c^2}{4} (\Psi_1^2(p))^2 (p^2 + m_s^2) \right].$$

Обсудим полученные результаты (21) и (23). Из них следует, что в модели (1) присутствуют частицы с массами m_Σ и m_σ , которые могут быть отождествлены с частицами Σ и σ из лагранжиана (14) (отметим, что в данной работе не рассматриваются вопросы, связанные с перенормировками). Инстантонные эффекты привели к тому, что в физическом подпространстве отсутствуют частицы с массами m_v , m_s , вместо них появляются нейтральные частицы с массами m_Σ и m_σ , причем сдвиг масс имеет порядок $\exp(-S_{\text{инст}})$ (см. (18)).

Поля Σ и σ могут быть аппроксимированы операторами $q(x)$ (см. (5)) и $\varphi^2(x)$. Беря вычеты в полюсах в соотношениях (21), (23), найдем

$$|\langle 0 | q(0) | \Sigma \rangle| = \frac{e}{2\pi} m_v, \\ |\langle 0 | \varphi^2(0) | \sigma \rangle| = c (1 - \pi f_s n c^2 \Psi_1^2(k)|_{k^2 = -m_\Sigma^2}), \quad n \ll 1.$$

Отметим отрицательность вычета в (21). В пространстве Минковского вычет будет положительным из-за дополнительных мнимых единиц в определении псевдоскалярного $q(x)$.

Таким образом, на больших расстояниях имеют место приближенные равенства

$$q(x) \approx |\langle 0 | q(0) | \Sigma \rangle| \Sigma(x), \quad \varphi^2(x) \approx |\langle 0 | \varphi^2(0) | \sigma \rangle| \sigma(x).$$

Отсюда ясно, что поле σ — истинный скаляр, а Σ — псевдоскаляр.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая приближение разреженного инстантонного газа, мы вычислили непертурбативный вклад в амплитуду вакуум-вакуумного перехода в евклидовом варианте двумерной скалярной электродинамики. Оказалось возможным перейти к эффективному низкоэнергетическому лагранжиану, содержащему одно скалярное и одно псевдоскалярное поля, не преобразующиеся калибровочной группой. Массы этих полей сдвинуты относительно масс полей A_μ и φ , рассчитанных по механизму Хиггса на величину порядка $\exp(-S_{\text{инст}})$, где $S_{\text{инст}}$ — действие инстантона.

В разделе 4 показано, как с помощью эффективного лагранжиана можно считать различные вакуумные средние рассматриваемой модели с учетом непертурбативных эффектов, связанных с инстантонами.

Фурье-образы от пропагаторов $\langle T F_{\mu\nu}(x) F_{\tau\rho}(y) \rangle$, $\langle T \varphi^2(x) \varphi^2(y) \rangle$ содержат полюса с массами, совпадающими с затравочными массами частиц, содержащихся в эффективном лагранжиане. Поэтому можно утверждать, что на больших расстояниях взаимодействие переносится нейтральными по отношению к калибровочной группе частицами.

Мы благодарим В. А. Матвеева, А. Н. Тавхелидзе и М. Е. Шапошникова за интерес к работе и ценные замечания.

Литература

- [1] *Fröhlich J., Morchio G., Strocchi F.* // Phys. Lett. 1980. V. B97. № 2. P. 249–252; Nucl. Phys. 1981. V. B190. № 4. P. 553–582.
- [2] *Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н., Шапошников М. Е.* // ТМФ. 1984. Т. 59. № 3. С. 323–344.
- [3] *Власов В. В., Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н., Хлебников С. Ю., Шапошников М. Е.* Каноническое квантование калибровочных теорий со скалярным конденсатом: Препринт П-0418. М.: ИЯИ, 1985.
- [4] *Sucher J., Woo C. H.* // Phys. Rev. 1973. V. D8. № 9. P. 2721–2724.
- [5] *Polyakov A. M.* // Nucl. Phys. 1977. V. B120. № 3. P. 429–458.
- [6] *Callan C. G., Dashen R. F., Gross D. J.* // Phys. Lett. 1976. V. B63. № 3. P. 334–340.
- [7] *Nielsen H. B., Olesen P.* // Nucl. Phys. 1973. V. B61. № 1. P. 45–61.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21.IV.1986 г.

INSTANTONS EFFECTS IN TWO-DIMENSIONAL SCALAR ELECTRODYNAMICS

Korotkov A. N., Tokarev V. F.

Effective Lagrangian is found which takes into account the effects of the complicated vacuum structure in the theory under consideration.